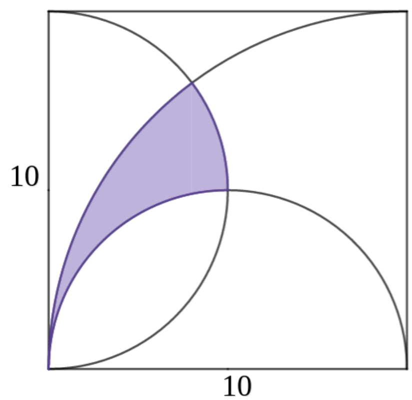
Tre cirklar i en kvadrat

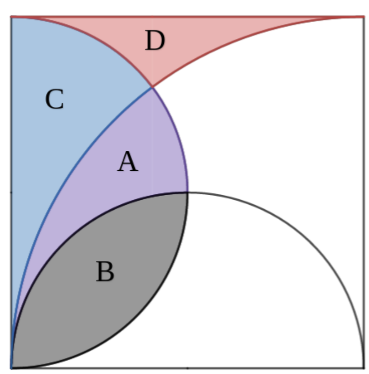
AlvinB

9 februari 2020

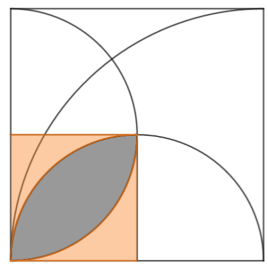
Problem. Bestäm arean av det färgade området i figuren.

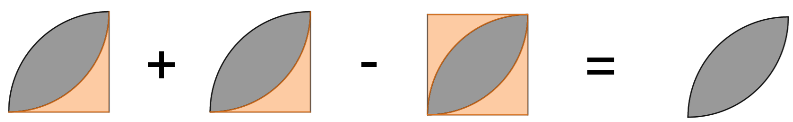


Lösning. Inför beteckningar enligt följande figur.



B kan bestämmas genom att betrakta kvadraten i det nedre vänstra hörnet.





B blir då lika med 2 gånger kvartscirkelns area minus kvadratens area.

$$B = 2 \cdot \frac{25\pi}{4} - 25 = \frac{25\pi}{2} - 25.$$

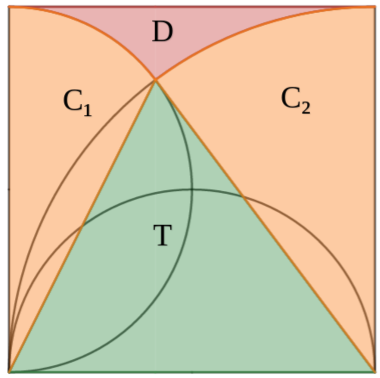
Eftersom A, B och C tillsammans utgör en halvcirkel kan $A + C$ bestämmas.

$$A + B + C = \frac{25\pi}{2} \Leftrightarrow A + C = \frac{25\pi}{2} - B = \frac{25\pi}{2} - \left(\frac{25\pi}{2} - 25\right) = 25.$$

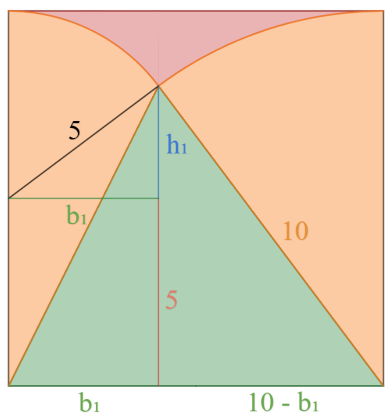
C, D och den stora kvartscirkeln utgör även hela kvadraten, vilket gör det möjligt att även bestämma $C + D$.

$$C + D + \frac{100\pi}{4} = 100 \Leftrightarrow C + D = 100 - 25\pi.$$

D kan bestämmas genom observationen att hela kvadraten utgörs av följande delar.



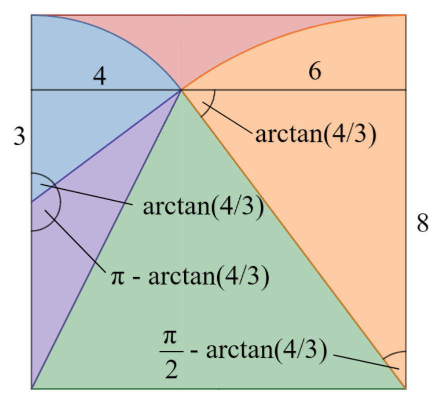
Triangelns dimensioner kan fås genom att rita in följande sträckor och använda Pythagoras sats.



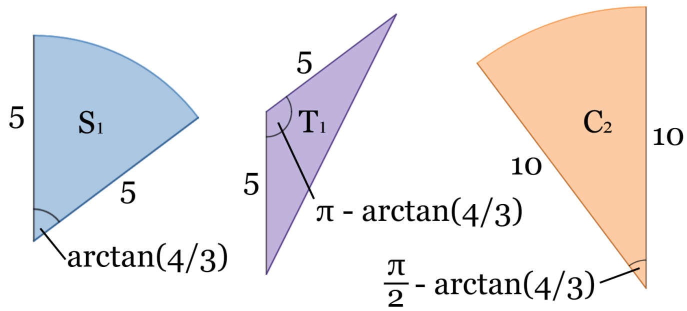
Pythagoras sats i de två rätvinkliga trianglarna ger $5^2 = b_1^2 + h_1^2$
$\Rightarrow h_1 = \sqrt{25 - b_1^2}$ och $(h_1 + 5)^2 + (10 - b_1)^2 = 10^2$.

$$\begin{aligned}
& (h_1 + 5)^2 + (10 - b_1)^2 = 10^2 \\
\Leftrightarrow\quad & h_1^2 + 10h_1 + 25 + 100 - 20b_1 + b_1^2 = 100 \\
\Leftrightarrow\quad & 25 - b_1^2 + 10\sqrt{25 - b_1^2} + 25 + 100 - 20b_1 + b_1^2 = 100 \\
\Leftrightarrow\quad & 10\sqrt{25 - b_1^2} - 20b_1 + 50 = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & \sqrt{25 - b_1^2} = 2b_1 - 5 \\
\Rightarrow\quad & 25 - b_1^2 = 4b_1^2 - 20b_1 + 25 \\
\Leftrightarrow\quad & 5b_1^2 - 20b_1 = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & 5b_1(b_1 - 4) = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & b_1 = 0 \text{ eller } b_1 = 4.
\end{aligned}$$

Det är uppenbart att $b_1 \neq 0$, varför $b_1 = 4$. Det ger $h_1 = \sqrt{25 - 4^2} = 3$, vilket också ger triangelns area till att vara $T = 10(5 + h_1)/2 = 10 \cdot 8/2 = 40$. De två gula områdena kan bestämmas genom att dela upp C_1 i cirkelsektorn S_1 och triangeln T_1 och utnyttja trigonometri för att ta reda på några vinklar.



Areorna av segmenten C_1 (som består av triangeln T_1 och cirkelsektorn S_1) och C_2 kan nu bestämmas.



Areasatsen ger T_1 som

$$T_1 = \frac{5 \cdot 5}{2} \sin(\pi - \arctan(4/3)) = \frac{25}{2} \sin(\arctan(4/3)).$$

Det kan sedan genom att rita upp en rätvinklig triangel (exempelvis med sidorna $3, 4$ och 5) inses att $\sin(\arctan(4/3)) = 4/5$, vilket ger

$$T_1 = \frac{25}{2} \cdot \frac{4}{5} = 10.$$

S_1 och C_2 bestäms till

$$S_1 = \pi \cdot 5^2 \cdot \frac{\arctan(4/3)}{2\pi} = \frac{25}{2} \arctan(4/3)$$

och

$$C_2 = \pi \cdot 10^2 \cdot \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan(4/3)}{2\pi} = 50 \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(4/3) \right).$$

Eftersom T, C_1, C_2 och D tillsammans utgör hela kvadraten kan D bestämmas.

$$\begin{aligned}
& T + C_1 + C_2 + D = 100 \\
\Leftrightarrow\quad & D = 100 - T - C_1 - C_2 \\
\Leftrightarrow\quad & D = 100 - T - T_1 - S_1 - C_2 \\
\Leftrightarrow\quad & D = 100 - 40 - 10 - \frac{25}{2} \arctan(4/3) - 50 \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(4/3) \right) \\
\Leftrightarrow\quad & D = 50 - 25\pi + \frac{75}{2} \arctan(4/3).
\end{aligned}$$

Då summan $D + C$ är känd fås även C.

$$\begin{aligned}
D + C = 100 - 25\pi \Leftrightarrow C &= 100 - 25\pi - \left(50 - 25\pi + \frac{25}{2} \arctan(4/3) \right) \\
&= 50 - \frac{75}{2} \arctan(4/3).
\end{aligned}$$

Eftersom vi även har summan $A + C$ får vi slutligen A.

$$A + C = 25 \Leftrightarrow A = 25 - \left(50 - \frac{75}{2}\arctan(4/3)\right) = \frac{75}{2}\arctan(4/3) - 25.$$

$$\boxed{A = \frac{75}{2}\arctan(4/3) - 25}.$$

Här är problemet en egentligen löst, men en kort diskussion om andra ekvivalenta svar (som man till exempel får om man löser problemet med koordinatgeometri och integraler) är relevant. För detta krävs två faktum.

Lemma 1. För alla alla positiva x gäller

$$\arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x).$$

Lemma 2.

$$\arctan\left(\frac{4}{3}\right) = 2\arctan\left(\frac{1}{2}\right).$$

Med Lemma 2 kan resultatet omformas till

$$\boxed{A = 75\arctan(1/2) - 25},$$

som kanske kan betraktas som det enklaste sättet att uttrycka svaret på. Med Lemma 1 kan detta vidare omvandlas till

$$\boxed{A = 75\left(\frac{\pi}{2} - \arctan(2)\right) - 25}.$$

Även kombinationer innehållande alla tre av $\arctan(4/3)$, $\arctan(1/2)$ och $\arctan(2)$ är möjliga. Därtill kan man även ha $\arctan(3/4)$, tack vare Lemma 1.

Nedan följer bevis av de två lemmana för den intresserade.

Bevis av Lemma 1. Konstruera en rätvinklig triangel med katetrarna 1 och x. De två spetsiga vinklarna kommer att vara $\arctan(1/x)$ och $\arctan(x)$ eftersom den ena vinkelns motstående katet är den andras närliggande. Triangelns vinkelsumma ger därefter

$$\begin{aligned}
& \arctan\left(\frac{1}{x}\right) + \arctan(x) + \frac{\pi}{2} = \pi \\
\Leftrightarrow \quad & \arctan\left(\frac{1}{x}\right) + \arctan(x) = \frac{\pi}{2} \\
\Leftrightarrow \quad & \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x).
\end{aligned}$$

Bevis av Lemma 2. Betrakta $\tan(2\arctan(1/2))$. Då följer av dubbelvinkelformeln för tangens att

$$\begin{aligned}\tan(2\arctan(1/2)) &= \frac{2\tan(\arctan(1/2))}{1-\tan^2(\arctan(1/2))} = \frac{2\cdot 1/2}{1-(1/2)^2} \\ &= \frac{1}{1-1/4} = \frac{1}{3/4} = \frac{4}{3}.\end{aligned}$$

Alltså är $\tan(2\arctan(1/2)) = 4/3$, och eftersom både $\arctan(4/3)$ och $2\arctan(1/2)$ ligger i intervallet $(-\pi/2, \pi/2)$ följer att $\arctan(4/3) = 2\arctan(1/2)$.